

ACCADEMIA ESERCITO - Preparazione Prova orale di Matematica

Esercitazione n. 1:

Risolvere la seguente equazione esponenziale:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+9} \cdot 8^{3x-1} = \left(\frac{1}{4}\right)^{x^2+x}$$

Procedimento risolutivo:

Utilizzando opportunamente le proprietà delle potenze, **si trasforma innanzitutto l'equazione nella seguente forma** (I e II membro devono presentare due potenze aventi stessa base):

$$a^{f(x)} = a^{g(x)}$$

Successivamente **l'equazione può essere risolta eguagliando i due esponenti** (se due potenze sono uguali e sono uguali le basi, devono essere uguali anche gli esponenti):

$$f(x) = g(x)$$

Applicazione del procedimento risolutivo all'esercizio proposto:

Esprimiamo tutte le potenze presenti nell'equazione in funzione della stessa base:

$$\begin{array}{l} 8 = 2^3 \\ \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \end{array} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x+9} \cdot (2^3)^{3x-1} = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{x^2+x}$$

↓

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+9} \cdot 2^{9x-3} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+2x}$$

↓

Potenza di potenza:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{3-9x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+2x}$$

↓

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x+9+3-9x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+2x}$$

↓

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{12-8x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2x^2+2x}$$

Potenza con esponente negativo:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m$$

Prodotto di due potenze aventi stessa base e diverso esponente:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Poiché nei due membri dell'equazione sono presenti due potenze aventi stessa base, **possiamo eguagliare gli esponenti**:

$$12 - 8x = 2x^2 + 2x$$

↓

$$2x^2 + 10x - 12 = 0$$

↓

$$x^2 + 5x - 6 = 0$$

↓

$$\Delta = 5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6) = 25 + 24 = 49$$

↓

$$x_{1/2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 1} = \frac{-5 \pm 7}{2}$$

Per il II principio di equivalenza delle equazioni, si possono dividere tutti i termini per 2 e si ottiene...

Equazioni II grado:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

In conclusione, le **soluzioni dell'equazione esponenziale** sono le seguenti:

$$x_1 = \frac{-5 - 7}{2} = -\frac{12}{2} = \boxed{-6}$$

$$x_2 = \frac{-5 + 7}{2} = \frac{2}{2} = \boxed{1}$$